

の学生のために 弓削康平

目次

1 動的な仮想仕事式の導出	2
2 三角形一次要素を用いた 2 次元問題の有限要素法定式化	3
2.1 三角形要素の形状関数	5
2.2 変位・ひずみ関係式	7
2.3 応力ひずみ関係式	9
2.4 1 要素の運動方程式	9
2.5 質量行列	9
2.6 剛性行列	13
2.7 荷重ベクトル	14
2.8 2 要素からなる系	15
2.9 変位拘束	17
2.10 多要素からなる系	19
2.11 減衰について	21
2.12 静的問題	21
3 4 節点アイソパラメトリック要素	24
3.1 適合性	24
3.2 パラメータ座標系の導入	27
3.3 変位・ひずみ関係式	28
3.4 応力ひずみ関係式	30
3.5 運動方程式	30
3.6 数値積分	31
3.7 多要素の運動方程式	36

1 動的な仮想仕事式の導出

図6に示されるように物体を考える．内部領域を V ，表面を S とする．また表面 S は荷重が与えられる境界 S_f と変位が与えられる境界 S_u とに分けられ，お互いに重なり合わない ($S_f \cup S_u = S$, $S_f \cap S_u = \phi$) とする．なお，静的な解析では，一意の解を得るために剛体変位を拘束する必要があるが， S_u は必ず必要であるが，動的な問題では $S_u = \phi$ でもかまわない．

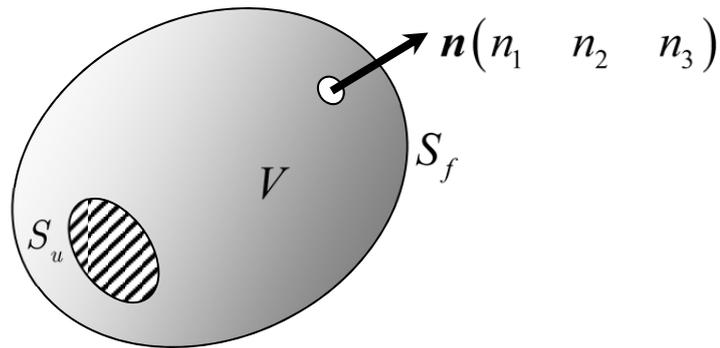


図 1 3次元領域 Ω とその表面 S

運動方程式エラー! 参照元が見つかりません。に仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ を乗じ，物質の体積全体で積分する． $\delta \mathbf{u}$ は S_u 上で 0, それ以外の場所では任意の値を取れるものとする．

$$\int_V \delta u_i (\rho \ddot{u}_i) dV = \int_V \delta u_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \right) dV \quad (1)$$

この式右辺第1項にガウスの発散定理

$$\int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV = \int_S n_j q_j dS \quad (2)$$

を適用する．すなわち上式の q_j として $q_j = (\delta u_i \sigma_{ji})$ を代入すると合成関数の微分則より

$$\int_V \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV = \int_S \delta u_i n_j \sigma_{ji} dS \quad (3)$$

を得るから，これを上式(1)の左辺第1項に代入すると

$$\int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = \int_S \delta u_i n_j \sigma_{ji} dS - \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV + \int_V \delta u_i \rho g_i dV \quad (4)$$

となる．ここで内力と表面力の関係式 **エラー! 参照元が見つかりません。** の $f_i = n_j \sigma_{ji}$ を代入して整理すると

$$\int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV = \int_{S_f} \delta u_i f_i dS + \int_V \delta u_i \rho g_i dV \quad (5)$$

さらに σ_{ji} の対称性を利用して左辺第 2 項を

$$\int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV = \int_V \sigma_{ij} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV \quad (6)$$

と書き換えると

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{\Gamma_f} \delta u_i f_i dS + \int_{\Omega} \delta u_i \rho g_i dV \quad (7)$$

を得る．このように任意の仮想変位 δu ($\delta u = 0$ on S_u) を乗じて部分積分して得られた式は(1)の**弱形式**と呼ばれる．これに対して元の支配方程式(1)は**強形式**と呼ばれる．これは部分積分によって支配方程式に表れる微分の階数（時間微分を除く）がひとつ少なくなっているためである．なお，上式で定義した

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

は**数学ひずみ**と呼ばれる．これに対して $i \neq j$ の場合（剪断ひずみ）に限り数学ひずみの 2 倍とする

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) & (i \neq j) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) & (i = j) \end{cases}$$

は**工学ひずみ**と呼ばれ，総和規約を用いない式展開でしばしば用いられる．(7)式は，よく知られている静的な仮想仕事式に左辺第 1 項が追加された形となっている．動的問題の有限要素法定式化はこの(7)が出発点となる．

2 三角形一次要素を用いた 2 次元問題の有限要素法定式化

本節では三角形一次要素を用いた 2 次元の動的問題に対する離散化を行う．

2次元問題に限定するために座標および変位のインデックス表示を用いず、座標は (x,y) で表し、 x , y 方向の変位をそれぞれ u,v で表すことにする。また、総和規約は使用せず、積和は \sum を用いて表すことにする。

図 2 に三角形要素により分割された 2次元領域を示す。 S_u は変位が拘束された境界 (Dirichlet 境界), S_t は荷重が与えられた境界 (Neumann 境界) である。三角形要素は頂点を共有している。この頂点を節点と呼ぶ。節点と要素にはそれぞれ通し番号をつける。今、領域内の要素をひとつ取り出す。要素の節点番号は下図のように 1, 2, 3 (反時計回り) とし、各節点の座標を図に示すように (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) で表す。また節点の x 方向および y 方向変位は節点番号を添字にして (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) と表すことにする。

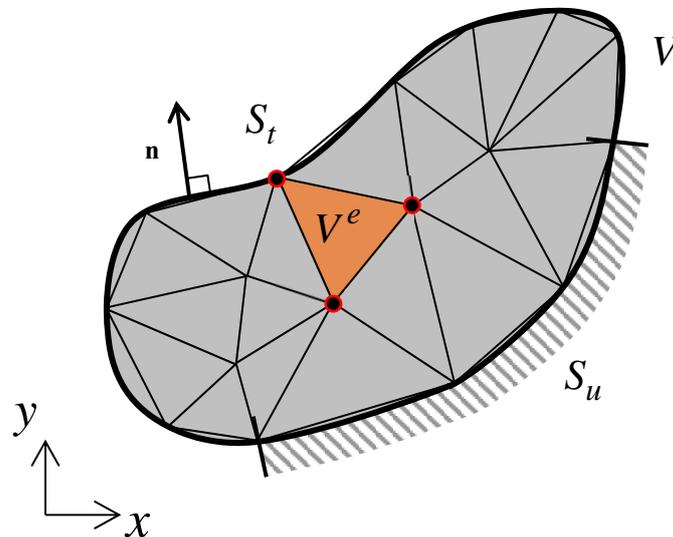


図 2 三角形要素による領域分割

2次元として取り扱える弾性体問題には大別して「平面応力場」と「平面ひずみ場」がある。前者は、薄板の面内変形のように肉厚方向の直応力と剪断応力が無視できる場合、後者が板厚が非常に厚く肉厚方向の直ひずみや剪断ひずみが0と見なされる場合である。ここでは前者の平面応力状態を仮定して定式化を進める。なお、以下では必要に応じて横ベクトルを記号 $[\quad]$ で、縦ベクトルを $\{ \quad \}$ で、また行列を $[\quad]$ で表すことにする。

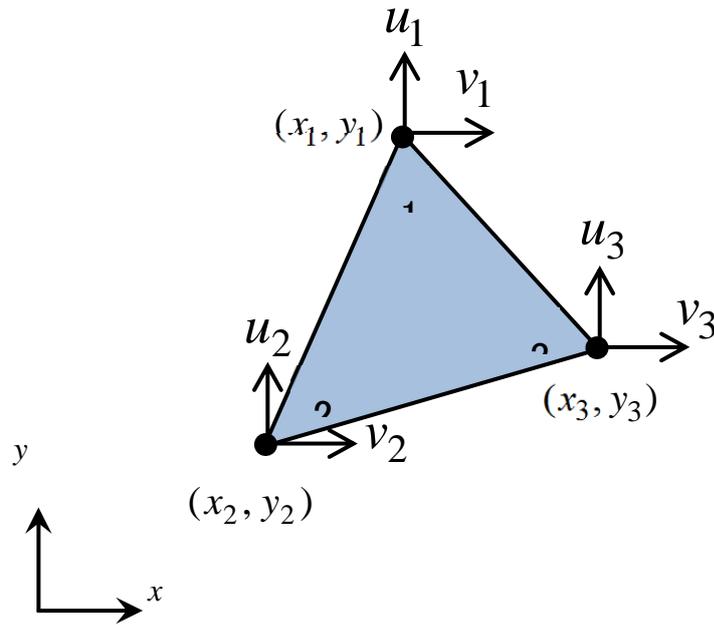


図 3 三角形一次要素

2.1 三角形要素の形状関数

さて、ここで要素内の任意点 (x, y) の x 方向変位を

$$u = a_0 + a_1x + a_2y \quad (9)$$

と表すことにする．節点 1, 2, 3 上の変位がそれぞれ u_1, u_2, u_3 であることより次の関係を得る．

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 \\ u_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 \\ u_3 &= a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 \end{aligned} \quad (10)$$

または

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

これを係数 a_0, a_1, a_2 について解いて次の関係を得る．

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - y_1x_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに

$$S = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \} \quad (13)$$

であり三角形要素の面積を表す.

同様に要素内任意点 (x, y) の y 方向変位に関しても

$$v = b_0 + b_1x + b_2y \quad (14)$$

とおくと、節点における座標と変位の関係より、係数 b_0 , b_1 , b_2 について

$$\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - y_1x_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

と表すことができる. 以上の関係を(9)および(14)に代入し、節点の変位について係数を整理すると

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (16)$$

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3$$

ここに

$$N_1 = \frac{1}{2S} \{ (x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \}$$

$$N_2 = \frac{1}{2S} \{ (x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \} \quad (17)$$

$$N_3 = \frac{1}{2S} \{ (x_1y_2 - y_1x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \}$$

という関係を得る. さらに上の関係は以下のように行列で表示することができる.

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{u}^e\} \quad (18)$$

ここに

$$\{\mathbf{u}\}^t = [u \quad v]$$

$$\{\mathbf{u}^e\}^t = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$$

N_1 , N_2 , N_3 は形状関数または内挿関数と呼ばれる. 図に N_1 の要素内の値を示す.

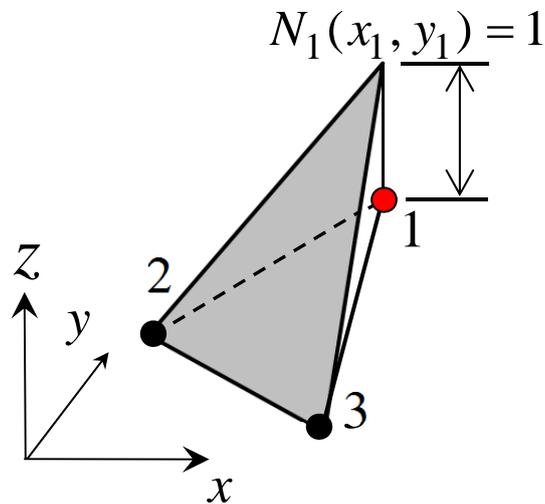


図4 形状関数 N_1 の分布

N_1 は節点1上で1, 節点2および3上では0となっていることが分かる. N_2 , N_3 についてもそれぞれ節点2, 3上で1, 他節点上で0となる. また, (17)の和を取ると

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (19)$$

が成立することが分かる. これは3節点が全て同じ値で変位する平行移動の場合に, 要素内の全ての点も平行移動をする剛体変位を表現できることを意味している.

2.2 変位・ひずみ関係式

はじめにひずみとして次の(工学)ひずみ3成分を定義する.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (20)$$

上式に(16)の変位近似式を代入すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \\ &= \frac{1}{2S} \{ (y_2 - y_3) u_1 + (y_3 - y_1) u_2 + (y_1 - y_2) u_3 \} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \\ &= \frac{1}{2S} \{ (x_3 - x_2) v_1 + (x_1 - x_3) v_2 + (x_2 - x_1) v_3 \} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 \right) \\ &= \frac{1}{2S} \{ (y_2 - y_3) v_1 + (y_3 - y_1) v_2 + (y_1 - y_2) v_3 + \\ &\quad (x_3 - x_2) u_1 + (x_1 - x_3) u_2 + (x_2 - x_1) u_3 \} \end{aligned} \quad (21)$$

以上の関係を行列を用いて表示すると

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^e\} \quad (22)$$

ここに

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \right]$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{32} & x_{13} & x_{21} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} & y_{23} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix}$$

である。

なお、上式の行列 $[\mathbf{B}]$ においては $y_2 - y_3$ を y_{23} などと略記した。上式から明らかのように要素内のひずみは一定である。このことから本要素は定ひずみ三角形要素(Constant Strain Triangle 要素)とも呼ばれる。

2.3 応力ひずみ関係式

平面応力状態の応力とひずみ関係式は次式で与えられる.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (23)$$

ここに

$$\{\sigma\}^t = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (24)$$

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

である.

2.4 1要素の運動方程式

これまで求めた関係を用いて, 前節で求めた動的な仮想仕事式

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma_f} \delta u_i f_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega \quad (7)$$

を表示すると

$$\begin{aligned} & t \int_S \rho (\delta u \ddot{u} + \delta v \ddot{v}) d\Omega + t \int_S (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) d\Omega \\ & = t \int_{\Gamma} (\delta u f_x + \delta v f_y) d\Gamma + t \int_S (\delta u b_x + \delta v b_y) d\Omega \end{aligned} \quad (26)$$

となる. 上式で t は板厚を, また積分領域 S は要素内積分を, Γ は辺に沿う境界積分を表す. 式より明らかなように上式では全ての項に板厚 t が係数として乗じられている.

2.5 質量行列

左辺第一項は(18)より

$$\begin{aligned}
t \int_S \rho (\delta u \ddot{u} + \delta v \ddot{v}) d\Omega &= t \int_S \rho \begin{bmatrix} \delta u & \delta v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} d\Omega \\
&= t \int_S \rho \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e \end{bmatrix} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{ \ddot{\mathbf{u}}^e \} d\Omega = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e \end{bmatrix} \left(t \int_S \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Omega \right) \{ \ddot{\mathbf{u}}^e \} \quad (27) \\
&= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e \end{bmatrix} [\mathbf{m}] \{ \ddot{\mathbf{u}}^e \}
\end{aligned}$$

となる。上式において

$$[\mathbf{m}] = \int_S t \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Omega \quad (28)$$

は要素の質量行列と呼ばれる。その具体形は

$$\begin{aligned}
[\mathbf{m}] &= \int_S t \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Omega = \int_S t \rho \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} d\Omega \\
&= \int_S t \rho \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & 0 & 0 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_3 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_3 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3^2 \end{bmatrix} d\Omega \quad (29)
\end{aligned}$$

となる。上式より質量行列が対称であることが理解できる。

さて任意形状の三角形について上式の積分を実行するためには次の積分公式 [が有用である。

$$\int_S N_1^i N_2^j N_3^k d\Omega = 2S \frac{i! j! k!}{(i+j+k+2)!} \quad (30)$$

(証明)

今、実座標系とは別に図エラー! 参照元が見つかりません。に示すように、辺 3-1 方向に点 3 を 0、点 1 で 1 となるパラメータ座標 X を取る。また、辺 3-2 方向に点 3 を 0、点 2 で 1 となるパラメータ座標 Y を取る。このパラメータ座標系では任意の三角形が下図のように一辺の長さが 1 の直角 2 等辺三角形となる。X = N₁ Y = N₂ となるような三角形内部の点は (19) より N₃ = 1 - (X + Y) とな

る.

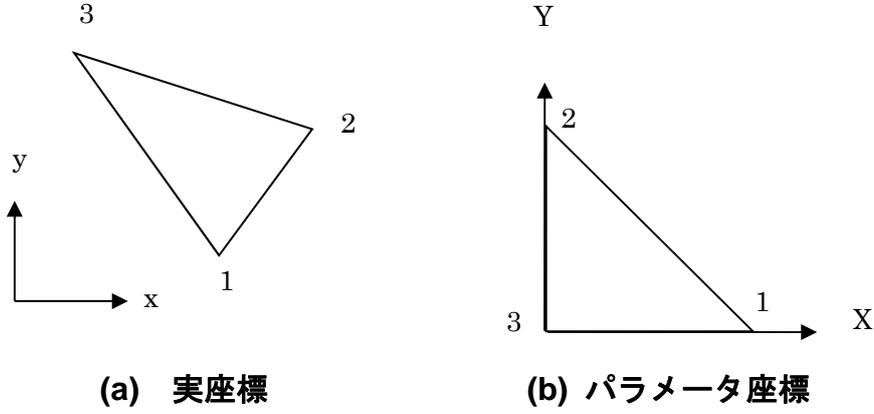


図5 三角形要素のパラメータ表示

従って要素内の積分をパラメータ表示すると

$$\begin{aligned}
 \int_S N_1^i N_2^j N_3^k dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-X} X^i Y^j (1-X-Y)^k |J| dY \right) dX \\
 &= 2S \int_0^1 \left(\int_0^{1-X} X^i Y^j (1-X-Y)^k dY \right) dX
 \end{aligned} \tag{31}$$

ここで(13)および(17)を用い

$$\begin{aligned}
 |J| &= \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x}} = \frac{1}{\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x}} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{y_2 - y_3}{2S} \right) \left(\frac{x_1 - x_3}{2S} \right) - \left(\frac{x_3 - x_2}{2S} \right) \left(\frac{y_3 - y_1}{2S} \right)} = 2S
 \end{aligned}$$

であることに注意する.

さらに上式の小括弧内を積分すると

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1-X} X^i Y^j (1-X-Y)^k dY &= \left[\frac{X^i Y^{j+1}}{j+1} (1-X-Y)^k \right]_0^{1-X} \\
 &\quad + \int_0^{1-X} \frac{X^i Y^{j+1}}{j+1} k (1-X-Y)^{k-1} dY \\
 &= \frac{k}{j+1} \int_0^{1-X} X^i Y^{j+1} (1-X-Y)^{k-1} dY
 \end{aligned}$$

部分積分により $(1-X-Y)$ の次数が k より $k-1$ へひとつ下がる一方, Y のべき乗項の次数がひとつ上がることに注意する. さらに部分積分を続けることによって

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(k-1)}{(j+2)(j+1)} \int_0^{1-X} X^i Y^{j+2} (1-X-Y)^{k-2} dY = \dots \\
&= \frac{k!}{(j+k)\cdots(j+2)(j+1)} \int_0^{1-X} X^i Y^{j+k} dY \\
&= \frac{k! \cdot X^i (1-X)^{j+k+1}}{(j+k+1)\cdots(j+2)(j+1)}
\end{aligned} \tag{32}$$

を得る. これを(31)に代入すると

$$\begin{aligned}
\int_S N_1^i N_2^j N_3^k dx dy &= 2S \int_0^1 \left(\int_0^{1-X} X^i Y^j (1-X-Y)^k dY \right) dX \\
&= 2S \int_0^1 \left(\frac{k! \cdot X^i (1-X)^{j+k+1}}{(j+k+1)\cdots(j+2)(j+1)} \right) dX
\end{aligned}$$

上式を(32)を求めた過程と同様に部分積分していくと

$$= 2S \cdot \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} \quad (\text{証明終})$$

この積分公式を用いれば

$$\begin{aligned}
\int_S N_1^2 d\Omega &= \int_S N_2^2 d\Omega = \int_S N_3^2 d\Omega = 2S \frac{2!}{4!} = \frac{S}{6} \\
\int_S N_1 N_2 d\Omega &= \int_S N_1 N_3 d\Omega = \int_S N_2 N_3 d\Omega = 2S \cdot \frac{1}{4!} = \frac{S}{12}
\end{aligned} \tag{33}$$

と計算できる. これらを(29)に代入すると質量行列は次式となる.

$$[\mathbf{m}] = \frac{\rho t S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

上式から明らかなように質量行列は非対角項にも0ではない成分を持つ. このように定式化に忠実に計算され非対角項に0でない成分を持つ質量行列は**整**

合質量行列(consistent mass matrix)と呼ばれる。これに対して要素の質量を節点の数で等分し各自由度の対角項のみに配置した質量行列れに対して要素の質量を3等分し

$$[\mathbf{m}'] = \frac{\rho S}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

を集中質量行列(lumped mass matrix)と呼ぶ。通常は整合質量行列を用いるが、後述のように陽解法による直接時間積分法の場合は、計算時間と誤差制御の観点から集中質量行列が用いられる。なお、どちらの質量行列も対称である。

2.6 剛性行列

さて(26)の左辺第2項は(22)および(23)の関係を利用すると

$$\begin{aligned} t \int_S (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) d\Omega &= t \int_S \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x & \delta \varepsilon_y & \delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega \\ &= t \int_S \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x & \delta \varepsilon_y & \delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{C}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = t \int_S \left(\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e \end{bmatrix} [\mathbf{B}]^t \right) \left([\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \{ \mathbf{u}^e \} \right) d\Omega \\ &= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e \end{bmatrix} \left(t \int_S [\mathbf{B}]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\Omega \right) \{ \mathbf{u}^e \} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^e \end{bmatrix} [\mathbf{k}] \{ \mathbf{u}^e \} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。上式で定義した

$$[\mathbf{k}] = t \int_S [\mathbf{B}]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\Omega = St [\mathbf{B}]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \quad (37)$$

は要素の剛性行列 (stiffness matrix) と呼ばれる。なお、積分は変位ひずみ関係式 $[\mathbf{B}]$ と応力ひずみ関係式 $[\mathbf{C}]$ がともに定数であることより要素面積 S を係数として乗じるのみでよい。なお、(37)の項は $k_{ij} = St (B_{ki} C_{kl} B_{lj})$ と表されるが、()内の第1項と第3項を入れ替え C_{kl} の対称性 ($C_{kl} = C_{lk}$) を利用すれば

$$k_{ij} = St (B_{ki} C_{kl} B_{lj}) = St (B_{lj} C_{kl} B_{ki}) = St (B_{lj} C_{lk} B_{ki}) = k_{ji} \quad (38)$$

であるから剛性行列は対称である。

2.7 荷重ベクトル

(26)式左辺第一項は

$$\begin{aligned} t \int_{\Gamma} (\delta u f_x + \delta v f_y) d\Gamma &= t \int_{\Gamma} [\delta u \quad \delta v] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Gamma = [\delta \mathbf{u}^e]^t \int_{\Gamma} [\mathbf{N}]^t \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Gamma \\ &= [\delta \mathbf{u}^e]^t \{\mathbf{f}_{\Gamma}\} \end{aligned} \quad (39)$$

となる。積分は辺に沿った積分となるのでその具体的な計算は以下のとおりとなる。

i) 辺 1-2 上の積分

辺の長さを l_{12} とし、下図に示すように辺に沿った座標系 s ($0 \leq s \leq l_{12}$) を定義すると辺上の形状関数は

$$N_1 = \frac{s}{l_{12}}, \quad N_2 = \frac{(l_{12} - s)}{l_{12}}, \quad N_3 = 0 \quad (40)$$

となるから積分は

$$\{\mathbf{f}_{\Gamma}\} = t \int_{\Gamma_{12}} [\mathbf{N}]^t \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Gamma = \frac{t}{l_{12}} \int_0^{l_{12}} \begin{bmatrix} s & 0 \\ l_{12} - s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & t \\ 0 & l_{12} - s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (41)$$

と表される。特に f_x , f_y が定数の場合は

$$\{\mathbf{f}_{\Gamma}\} = \frac{l_{12}t}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{l_{12}t}{2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_x \\ 0 \\ f_y \\ f_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

と計算される。辺 2-3, 3-1 についても上述と同じように求めることができる。

最後に (26)式左辺第二項は

$$\begin{aligned}
t \int_S (\delta u b_x + \delta v b_y) d\Omega &= t \int_S [\delta u \quad \delta v] [\mathbf{N}]^t \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dV = [\delta \mathbf{u}^e] t \int_S [\mathbf{N}]^t \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dV \\
&= [\delta \mathbf{u}^e] \{\mathbf{f}_b\}
\end{aligned}
\tag{43}$$

となる．特に物体力 b_x , b_y が定数の場合は(30)より

$$\{\mathbf{f}_b\} = t \int_S \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dV = \frac{St}{3} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_x \\ b_x \\ b_y \\ b_y \\ b_y \end{Bmatrix}$$

となる．以上をまとめると(26)は

$$[\delta \mathbf{u}^e] \left([\mathbf{m}] \{\ddot{\mathbf{u}}^e\} + [\mathbf{k}] \{\mathbf{u}^e\} \right) = [\delta \mathbf{u}^e] \left(\{\mathbf{f}_r\} + \{\mathbf{f}_b\} \right)
\tag{44}$$

となる．これが弱形式で表示された 1 要素の運動方程式となる．

2.8 2要素からなる系

次に 2 要素からなる系の運動方程式を作成する．節点と要素には下図のように番号が付けられているものとする．この場合，各要素を構成する節点は反時計回りに

要素 1 : 1,2,3

要素 2 : 2,4,3

となる．このような要素番号とそれを構成する節点番号との関係は**要素コネクティビティ**と呼ばれ，有限要素法では最も基本的な入力データのひとつである．また，**要素変位ベクトル**を次のように定義する．

$$\text{要素 1} : [\mathbf{u}^{(1)}] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]
\tag{45}$$

$$\text{要素 2} : [\mathbf{u}^{(2)}] = [u_2 \quad u_4 \quad u_3 \quad v_2 \quad v_4 \quad v_3]$$

また，全ての変位を節点の順に並べた**全体変位ベクトル**

$$[\mathbf{u}^{\text{all}}] = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]$$

および $\{\mathbf{u}^{\text{all}}\}$ から $\{\mathbf{u}^{(1)}\}$, $\{\mathbf{u}^{(2)}\}$ を

$$\{\mathbf{u}^{(1)}\} = [\mathbf{L}^{(1)}] \{\mathbf{u}^{\text{all}}\}, \quad \{\mathbf{u}^{(2)}\} = [\mathbf{L}^{(2)}] \{\mathbf{u}^{\text{all}}\} \quad (46)$$

という演算により抽出する演算行列 $[\mathbf{L}^{(1)}]$, $[\mathbf{L}^{(2)}]$ も定義しておく. これらの関係を利用すれば, 各要素内の変位は(18)より

$$\text{要素 1 内: } \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(1)}\}$$

$$\text{要素 2 内: } \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(1)}\}$$

と表される. 従って運動方程式(26)の左辺第 1 項の慣性力のなす仮想仕事は要素 1 および 2 内の仮想仕事の和として,

$$t \int_S \rho (\delta u \ddot{u} + \delta v \ddot{v}) d\Omega = [\delta \mathbf{u}^{(1)}] [\mathbf{m}^{(1)}] \{\ddot{\mathbf{u}}^{(1)}\} + [\delta \mathbf{u}^{(2)}] [\mathbf{m}^{(2)}] \{\ddot{\mathbf{u}}^{(2)}\}$$

と表される. ここに $[\mathbf{m}^{(1)}]$, $[\mathbf{m}^{(2)}]$ は(34)で計算される要素質量行列である.

ここで(46)の関係を用いれば上式は

$$t \int_S \rho (\delta u \ddot{u} + \delta v \ddot{v}) d\Omega = [\delta \mathbf{u}^{\text{all}}] [\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}^{\text{all}}\}$$

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{L}^{(1)}]^t [\mathbf{m}^{(1)}] [\mathbf{L}^{(1)}] + [\mathbf{L}^{(2)}]^t [\mathbf{m}^{(2)}] [\mathbf{L}^{(2)}] \quad (47)$$

と書くことができる. $[\mathbf{M}]$ は 8 行 8 列であり, 全体質量行列と呼ばれる. (38)で示したように対称な行列に対する 2 次形式の演算結果はやはり対称な行列になるので上式の全体質量行列は対称となる.

同様に式(26)の左辺第 2 項は

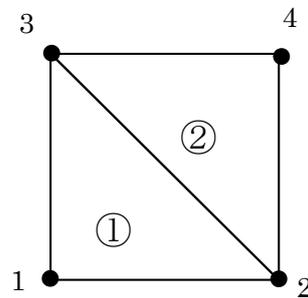


図 6 2 要素からなる系

$$t \int_S (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_y \delta \varepsilon_y) d\Omega = [\delta \mathbf{u}^{\text{all}}] [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}^{\text{all}}\}$$

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}^{(1)}]^t [\mathbf{k}^{(1)}] [\mathbf{L}^{(1)}] + [\mathbf{L}^{(2)}]^t [\mathbf{k}^{(2)}] [\mathbf{L}^{(2)}] \quad (48)$$

と表される. $[\mathbf{k}^{(1)}]$, $[\mathbf{k}^{(2)}]$ はそれぞれ要素 1, 2 の剛性行列である. なお、質量行列と同様に、対称な行列に対する 2 次形式の演算結果はやはり対称な行列になるので上式の全体剛性行列は対称である.

一方、(26)の右辺第一項も同様に

$$t \int_{\Gamma} (\delta u f_x + \delta v f_y) d\Gamma = [\delta \mathbf{u}^e] \{\mathbf{f}_r\}$$

$$\{\mathbf{f}_r\} = [\mathbf{L}^{(1)}]^t \{\mathbf{f}_r^{(1)}\} + [\mathbf{L}^{(2)}]^t \{\mathbf{f}_r^{(2)}\} \quad (49)$$

となる. ここで $\{\mathbf{f}_r^{(1)}\}$, $\{\mathbf{f}_r^{(2)}\}$ はを要素 1 および要素 2 に関する(41)によって計算される外力ベクトルである. なお、本式は荷重のかかる境界について計算を行えばよく、節点 2-3 間に沿う積分も内部領域であるから実施する必要はない.

(26)の右辺第二項も

$$t \int_S (\delta u b_x + \delta v b_y) d\Omega = [\delta \mathbf{u}^{\text{all}}] \{\mathbf{f}_b\}$$

$$\{\mathbf{f}_b\} = [\mathbf{L}^{(1)}]^t \{\mathbf{f}_b^{(1)}\} + [\mathbf{L}^{(2)}]^t \{\mathbf{f}_b^{(2)}\} \quad (50)$$

と計算される. $\{\mathbf{f}_b^{(1)}\}$, $\{\mathbf{f}_b^{(2)}\}$ は要素 1 と要素の(43)で計算される物体力ベクトルである. 以上の右辺ベクトルをひとつにまとめ

$$\{\mathbf{f}^{\text{all}}\} = \{\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_b\} \quad (51)$$

と表示することにする. (47), (48), (49), (51)をまとめると 2 要素からなる系の弱形式で表示された運動方程式として

$$[\delta \mathbf{u}^{\text{all}}] \left([\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}^{\text{all}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}^{\text{all}}\} \right) = [\delta \mathbf{u}^{\text{all}}] \{\mathbf{f}^{\text{all}}\} \quad (52)$$

を得る.

2.9 変位拘束

ここまで境界に荷重が作用している場合の荷重ベクトルの計算方法には触れたが、変位が拘束されている場合の取り扱いは特に説明しなかった. 今、今、辺 1-2 に沿って変位が拘束され、辺 3-4 に分布荷重が作用しているものとする. この場合は下図のように節点 1 と節点 2 の節点変位が拘束され、節点 3, 4 の荷重項には(41)で計算された値が入る.

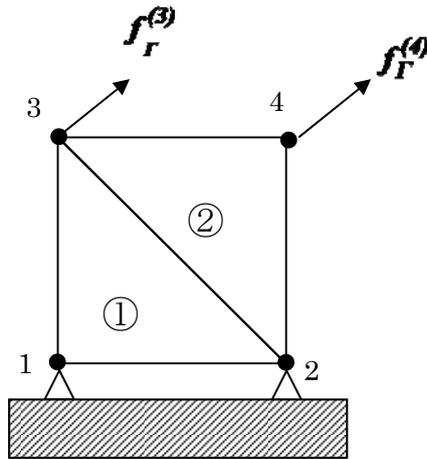


図 7 境界条件の考慮

変位拘束境界では仮想変位は 0 となるため運動方程式(52)は

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_4 & \delta v_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{21} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{v}_4 \end{array} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \end{array} \right\} \\
 & = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_4 & \delta v_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} f_{u1} \\ f_{v1} \\ f_{u2} \\ f_{v2} \\ f_{u3} \\ f_{v3} \\ f_{u4} \\ f_{v4} \end{array} \right\} \quad (53)
 \end{aligned}$$

となる。なお、上式では質量行列 \mathbf{M} および剛性行列 $[\mathbf{K}]$ を拘束されている変位と拘束されていない変位とに分離し、それぞれ 4 行 4 列の部分行列に分けて表示した。また、右辺荷重ベクトルの添字は対応する変位を表している。

上式を計算すると縮約された方程式として

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_4 & \delta v_4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_3 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{v}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \right) \\
& = \begin{bmatrix} \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_4 & \delta v_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{u3} \\ f_{v3} \\ f_{u4} \\ f_{v4} \end{Bmatrix} \quad (54)
\end{aligned}$$

を得る．任意の仮想変位に対して上式が恒等的に成立するためには

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_3 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{v}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u3} \\ f_{v3} \\ f_{u4} \\ f_{v4} \end{Bmatrix} \quad (55)$$

が成立する必要がある．これが最終的に解くべき運動方程式である．

2.10 多要素からなる系

図 2 に示したように解析領域が多要素に分割されている場合は，2要素の考え方をそのまま拡張すればよい．全節点数を N とすると，全体変位ベクトルは

$$\mathbf{u}^{\text{all}} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & \cdots & u_N & v_N \end{bmatrix}$$

となる．

また全体変位ベクトル \mathbf{u}^{all} から要素 i 変位ベクトル $\mathbf{u}^{(i)}$ を抽出する行列を $[\mathbf{L}^{(i)}]$ とすると全体質量行列 $[\mathbf{M}]$ と全体剛性行列 $[\mathbf{K}]$ はそれぞれ

$$[\mathbf{M}] = \sum_{i=1}^{NE} [\mathbf{L}^{(i)}]^t [\mathbf{m}^{(i)}] [\mathbf{L}^{(i)}] \quad (56)$$

$$[\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^{NE} [\mathbf{L}^{(i)}]^t [\mathbf{k}^{(i)}] [\mathbf{L}^{(i)}] \quad (57)$$

で与えられる．上式において NE は全要素数を，また， $[\mathbf{m}^{(i)}]$ ， $[\mathbf{k}^{(i)}]$ はそれぞれ，要素 i の質量行列および剛性行列を表す．

右辺の全体荷重ベクトルも同様に

$$\{\mathbf{f}^{\text{all}}\} = \sum_{i=1}^{NE} [\mathbf{L}^{(i)}]^t \{\mathbf{f}_r^{(i)} + \mathbf{f}_b^{(i)}\} \quad (58)$$

と表される.

以上の関係を整理すると多要素の弱形式で表された運動方程式は次のようになる.

$$[\delta \mathbf{u}^{\text{all}}] \left([\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{u}}^{\text{all}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}^{\text{all}}\} \right) = [\delta \mathbf{u}^{\text{all}}] \{\mathbf{f}^{\text{all}}\} \quad (59)$$

仮想変位 $\delta \mathbf{u}^{\text{all}}$ は図 2 の変位拘束境界 S_u 上の節点変位は 0, それ以外は任意の値となるとの条件の下に上式を解くことになる.

なお, $[\mathbf{M}]$ も $[\mathbf{K}]$ も式(56), (57)より明らかにより対称な行列に対する 2 次形式演算によって得られる行列であり対称である. さらに $[\mathbf{M}]$ については任意のベクトル $\{\mathbf{x}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ に対して,

$$[\mathbf{x}] [\mathbf{M}] \{\mathbf{x}\} > 0$$

が成立する. このような行列は**正定値行列**と呼ばれる. また $[\mathbf{K}]$ については任意のベクトル $\{\mathbf{x}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ に対して,

$$[\mathbf{x}] [\mathbf{K}] \{\mathbf{x}\} \geq 0$$

という性質がある. このような行列は**半正定値行列**と呼ばれる. これらの演算が本質的には運動エネルギー、ひずみエネルギーを表すものであり、後者は剛体変位を表す $\{\mathbf{x}\}$ に対してはひずみエネルギーが 0 になることを考えれば理解できる.

S_u 上にあり変位が拘束されている変位を $\{\mathbf{u}_s\}$, それ以外の変位を $\{\mathbf{u}_f\}$ と表すことにし, $\{\mathbf{u}^{\text{all}}\}$ を並び替えて

$$[\mathbf{u}^{\text{all}'}] = [\mathbf{u}_f \quad \mathbf{u}_s] \quad (60)$$

とする. 仮想変位もこの準に並べ換えると運動方程式(59)は

$$\begin{aligned} & [\delta \mathbf{u}_f \quad \delta \mathbf{u}_s] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_f \\ \ddot{\mathbf{u}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} \right) \\ & = [\delta \mathbf{u}_f \quad \delta \mathbf{u}_s] \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

と表すことができる. なお, 上式では質量行列と剛性行列も行と列を対応する自由度の順に並べかえ部分行列で表示している. また, 右辺の荷重ベクトルも対応する自由度の順に並べかえている.

ここで $\delta \mathbf{u}_s = 0$ および $\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$ の条件を上式に代入すると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_f \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right) \\ & = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_f & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

部分行列に展開すると

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_f \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \end{Bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f \end{Bmatrix} \quad (63)$$

を得る．ここで $\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_f \end{bmatrix}$ は任意の仮想変位であるから上式が恒等的に成立する条件として

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f \end{Bmatrix} \quad (64)$$

を得る．対称な行列の行と列を並び替えて得られる $\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix}$ はやはり対称であることに注意しよう．この(64)が最終的に解くべき運動方程式となる．以降，下添字を省略した

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

は拘束変位を除いた(64)と同じ式を表すものとする．

2.11 減衰について

実際の構造物には完全な弾性体はなく，運動には減衰力が働くことが多い．そこで

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (66)$$

と速度に比例する減衰項 $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix}$ を入れ， $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix}$ として

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (67)$$

としばしば近似する．この減衰行列をレーリー (Rayleigh) 減衰と呼ぶ．

以上の運動方程式は，1) 周期性を有する荷重に対する系の応答を計算する，2) 固有振動数と固有モードを計算する，3) 時間を少しずつ進めながら運動方程式を解き，系の応答を調べるなど目的に応じて異なる解き方を選択する．これらの解法については次章以降で説明する．

2.12 静的問題

(65)において慣性項を落とすと，静的問題の剛性方程式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

を得る。静的な問題では剛性変位が発生しないように拘束しないと上式の解が不定となり一意な解が得られないことに注意する。

練習 2.1

下図に示す静的な問題を解くプログラムを作成しなさい。なおヤング率とポアソン比はそれぞれ $E = 200000[N/mm^2]$, $\nu = 0.27$ とする。また、板厚は $1[mm]$ とする。

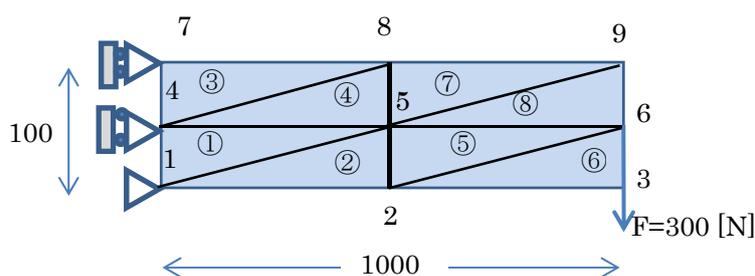


図 8 三角形要素を用いた静的解析

プログラムの例を以下に示す。

```

1: young=200000.0; pois=0.27;           % 材料定数
2: nelm=8; nnode=9                       % 全要素数, 全節点数
3: x=[0 500 1000 0 500 1000 0 500 1000]; % 節点x座標
4: y=[0 0 0 50 50 50 100 100 100];     % 節点y座標
5: % 要素コネクティビティ(要素1から順に)
6: ne=[1 5 4;1 2 5;4 8 7; 4 5 8;2 6 5; 2 3 6;5 9 8; 5 6 9]
7: fix=[1 2 7 13];                       % 拘束自由度
8: f=zeros(2*nnode,1); f(12)=-300;      % 荷重ベクトルの作成
9: % 応力ひずみ関係式 [C]の作成
10: C=zeros(3);
11: c1=young/(1-pois*pois); c2=pois*c1;c3=young/(2*(1+pois));
12: C(1,1)=c1;C(2,2)=c1;C(1,2)=c2; C(2,1)=c2;C(3,3)=c3;
13: K=zeros(2*nnode);                    % 全体剛性行列を準備する
14: for i=1:nelm                          % 要素の数だけ繰り返す
15:   i1=ne(i,1); i2=ne(i,2); i3=ne(i,3); % 要素を構成する節点番号
16:   map=[2*i1-1 2*i2-1 2*i3-1 2*i1 2*i2 2*i3]; % 要素自由度の並び
17:   x21= x(i2)-x(i1); x31= x(i3)-x(i1);
18:   x32= x(i3)-x(i2); y21= y(i2)-y(i1);
19:   y31= y(i3)-y(i1); y32= y(i3)-y(i2);
20:   s= 05*(x21* y31-x31*y21);
21: % [B]行列の計算
22: B=zeros(3,6);
23: B(1,1)=-y32; B(1,2)=y31; B(1,3)=-y21;
24: B(2,4)=x32; B(2,5)=-x31;B(2,6)=x21;
25: B(3,1)=x32; B(3,2)=-x31; B(3,3)=x21;
26: B(3,4)=-y32; B(3,5)=y31; B(3,6)=-y21;

```

```

27: B=B/(2*s);
28: % 要素剛性行列の計算
29: ke=s*B'*C*B
30: % 全体剛性行列への足し込み
31: K(map,map)=K(map,map)+ke;
32: end
33: % 拘束されていない自由度のリスト作成
34: % なお, setdif: ベクトルの差を作る内部関数
35: free=setdiff([1:2*nnode],fix);
36: % 連立方程式を解く
37: u=zeros(2*nnode,1);
38: u(free)=K(free,free)\f(free)
39: % 変形図を解く
40: uu=reshape(u,2,nnode)
41: scale=100;
42: xx=x+scale*uu(1,:);
43: yy=y+scale*uu(2,:);
44: triplot(ne,x,y,'b');hold on
45: triplot(ne,xx,yy,'r')

```

-
- 3, 4行目では節点のx座標およびy座標を一次元配列として定義している。
 - 6行目では要素コネクティビティの定義を行っている。なお,「;」記号は行の区切りを表す。
 - 7行目では拘束されている自由度番号を一次元配列出示している。拘束されているのは、節点1のx,y方向変位, および節点4,7のy方向変位であるから[1 2 7 12]となる。
 - 8行目は荷重ベクトルを作成している。zeros(2*nnode)で節点数×2の大きさのゼロベクトルを作成し、12番自由度（節点6のy方向変位）に荷重値・300を与える。
 - 9行目から12行目では(25)に示した応力とひずみの関係式を定義している。
 - 13行目のzeros()は指定した大きさの0行列では全自由度数の行と列を持つ全体剛性行列として0行列を定義している。
 - 14行目のfor文から32行目のend文の間では、要素剛性行列を作成し、全体剛性行列に組み込む作業が繰り返される。
 - 21行目から27行目にかけては(22)で定義される変位・ひずみ関係式を作成する。なお、27行目では[B]の全ての項に対して除算が実行される。
 - 29行目は(37)で定義される要素剛性行列を計算している。なお、MATLABでは行列の転置は'で表される。従って[B]'^T[C][B]はプログラムではB'*D*B となることに注意する。
 - 31行目は全体剛性行列Kに要素剛性行列keを加えている。Kとkeでは行列の大きさが異なるために単純に和を計算させるとエラーになる。ここでは Kのどの行と列にkeの項を加えるかを配列mapで指定している。この作業を定義した(57)式では、全体自由度から要素自由度を抽出する行列 $[L^{(i)}]$ およびその転置を要素剛性行列keに乗じているが、ここに示したものと同一結果となり、実行時間はこちらの方が早い。
 - 35行目では組み込み関数setdif()を用いて、1,2,3,...,2*nnodeという全自由度から拘束された自由度を除いた自由度ベクトルを作成している。
 - 38行目は連立方程式を解いている。MATLABでは連立方程式Ax=yをx=A\yによって解くことができる。また、ここでは拘束されていない（アクティブな）自由度を並べた一次元配列freeを用いて、その部分だけを用いて連立方程式を解いている。
 - 39行目から45行目では変形前後の様子を描画している。すなわち、40行目では、計算により得られた変位を組み込み関数reshape()によって2行の行列に変更している。これによって行列uuの1行目はx方向変位、2行目はy方向変位となる。42, 43行目では変形を100倍に

拡大した場合の節点位置を計算している。44, 45行目は3角形を書く内部関数tripot()を用いて変形前の要素を描画している。なお、引数 'b' および'r'はそれぞれ描画する線の色として青、赤を指定している。また、hold onは、45行目のグラフも同じグラフウィンドウに重ね書きすることを指示している。

このプログラムを実行すると、グラフウィンドウに次の変形図が描画される。

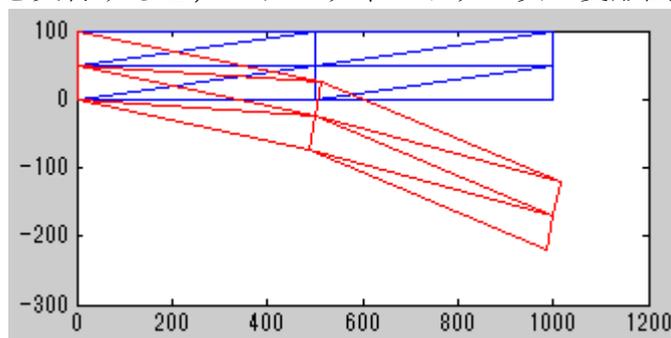


図9 変形図の描画

3 4 節点アイソパラメトリック要素

前節では三角形一次要素の定式化を示した。実際の2次元問題の解析では、入力データが少なくすみ、精度も良いために四辺形要素が好んで用いられる。ここでは代表的な四辺形要素として4節点アイソパラメトリック要素について説明する。

3.1 適合性

4節点要素の具体的な定式化に触れる前に、要素の適合性について述べておく。有限要素法では解が収束する条件として、変位が連続していることが要求される。これを**適合条件**と呼ぶ。連続性は要素内だけではなく、要素境界でも隣り合う要素同士の変位に「ずれ」や「重なり」が生じていないことが要求される。このためには、要素境界上の節点のみによって要素境界の変位が一意に決定されることが必要である。MacNeal[1991]は三角形要素と四辺形要素の適合性について以下のように説明している。

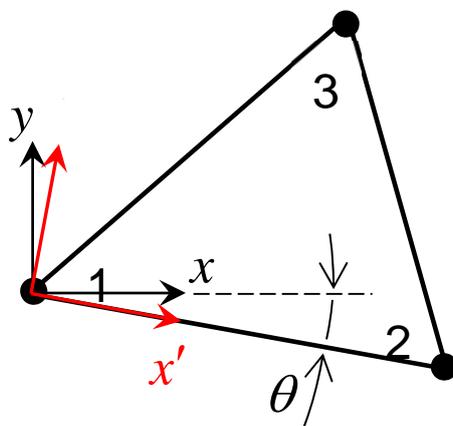


図 10 三角形要素の座標変換

三角形一次要素の座標系を図の辺 1-2 の方向に変換すると

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (69)$$

これを変位関数

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (70)$$

に代入して整理すると

$$\begin{aligned} u(\hat{x}, \hat{y}) &= a_0 + (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)x' + (-a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)y' \\ &= a_0 + a'_1 x' + a'_2 y' \end{aligned} \quad (71)$$

を得る. この式に $y' = 0$ を代入すれば

$$u(\hat{x}, 0) = a_0 + a'_1 x' \quad (72)$$

となる. 未知係数が 2 個だけであるから, 節点 1・2 の変位だけで x' 軸上の変位を決めることができる. これより三角形一次要素が, 要素境界において適合条件を満たしていることがわかる.

続いて下図のような 4 節点からなる四辺形要素を考える. 4 節点の変位を用いて決定できる係数は 4 つなので, 変位関数は次の形を用いるのが自然である.

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \quad (73)$$

全ての辺が x, y 軸のいずれかと平行な場合, 例えば 90 度回転させたとき節点 1, 2 が作る辺と平行に x' 軸をとる座標系を作ると,

$$\begin{cases} x = -y' \\ y = x' \end{cases} \quad (74)$$

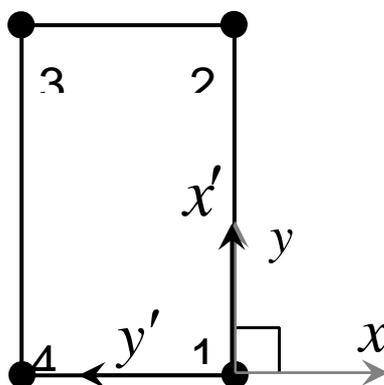


図 11 長方形要素の座標変換

となる．これを変位の近似式(73)に代入すると次式を得る．

$$u(x', y') = a_0 + a_1'x' + a_2'y' + a_3'x'y' \quad (75)$$

\hat{x} のとき， x' 軸上の変位を表す式は $y' = 0$ を上式に代入して，

$$u(x', 0) = a_0 + a_1'x' \quad (76)$$

となる．式の未知係数は 2 つであり，節点 1 と 2 の変位だけで x' 軸上の変位を決めることができる．座標軸と平行な辺を持つ長方形要素の場合，要素境界において適合条件は満たされるのである．

続いて下図のように座標軸とは平行でない辺を持つ一般の四辺形を考える．

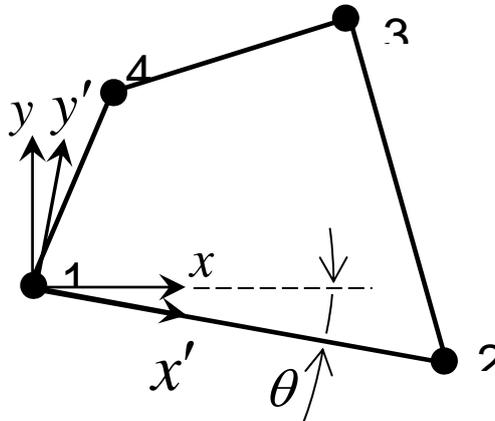


図 12 一般の四辺形の座標変換

節点 1, 2 が作る辺と平行に x' 軸をとる座標系を考えると，次の座標変換則が成り立つ．

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (77)$$

これに変位の近似式 $u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ に代入すると，

$$u(x', y') = a_0 + a_1'x' + a_2'y' + a_3'x'y' + a_4'(x'^2 - y'^2) \quad (78)$$

となる．このとき， x' 軸上の変位は $y' = 0$ を(78)式に代入して，

$$u(x', 0) = a_0 + a_1'x' + a_4'x'^2 \quad (79)$$

となる．未知係数が 3 個残るため，節点 1・2 の変位だけでは x' 軸上の変位は一意に決まらないことがわかる．すなわち，四辺形要素は(73)に示す実座標を用いた変位関数を用いた場合，座標軸に全ての辺が平行な場合に限り適合で，任意形状の四辺形は非適合となるのである．

3.2 パラメータ座標系の導入

この問題を解決するために提案されたのがアイソパラメトリック要素 (*文献) である. この要素では, 図 4 (b)に示すように実座標系とは別に, 向かい合う辺の中央を結ぶパラメータ座標系(ξ η)を定義する. 節点 1, 2, 3, 4 のパラメータ座標をそれぞれ $(-1 \ -1)$, $(1 \ -1)$, $(1 \ 1)$, $(-1 \ 1)$ とする. したがってパラメータ座標系で要素を表示すると図 4 (b)のように辺が座標軸に平行な正方形となる. 実座標とパラメータ座標は次式でマッピングされる.

#1

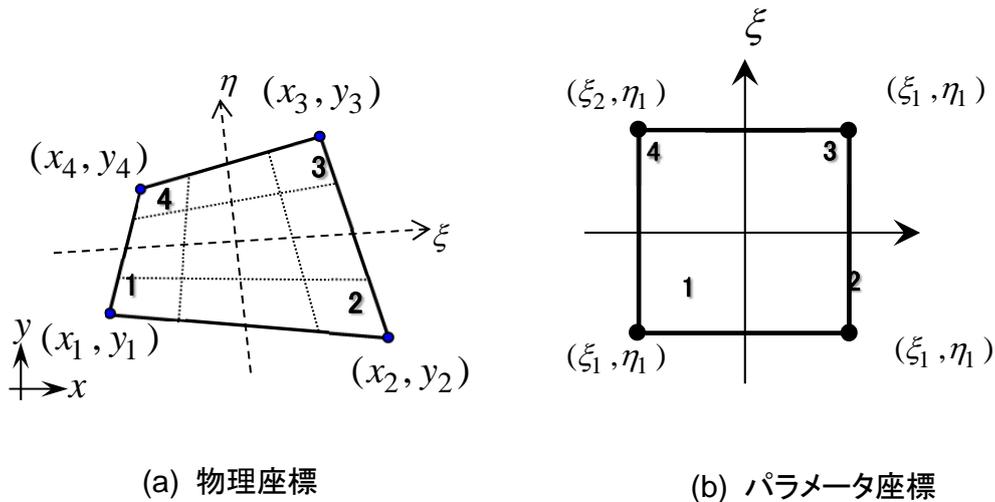


図 13 4 節点アイソパラメトリック要素

$$x = N_1(\xi \ \eta)x_1 + N_2(\xi \ \eta)x_2 + N_3(\xi \ \eta)x_3 + N_4(\xi \ \eta)x_4$$

$$y = N_1(\xi \ \eta)y_1 + N_2(\xi \ \eta)y_2 + N_3(\xi \ \eta)y_3 + N_4(\xi \ \eta)y_4$$

ここに

$$N_1(\xi \ \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2(\xi \ \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi \ \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{80}$$

$$N_4(\xi \ \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

または

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)$$

ここに ξ_I, η_I は節点 I のパラメータ座標を表す。以降 N_I が ξ と η の関数であることを示す記号 (ξ, η) は省略する。 N_I は形状関数と呼ばれ、節点 I 上は 1 となり、他節点上では 0 となる。また、形状関数の和は ξ と η の値に関わらず

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \quad (81)$$

が成立することに注意する。

アイソパラメトリック要素は、要素内の任意点 (ξ, η) の変位をこの形状関数をそのまま用いて次のように近似する。

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \end{aligned} \quad (82)$$

または

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{ \mathbf{u}_e \} \quad (83)$$

ここに

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$\{ \mathbf{u}_e \}^t = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$$

前節で座標軸と平行な長方形要素は要素境界で適合であることを示した。本要素はパラメータ座標系に正方形要素を定義し、それを実座標にマッピングすることによって任意の四辺形に対して適合条件を満たすことができるのである。

3.3 変位・ひずみ関係式

三角形要素と同様、平面応力場を考え、ひずみとして $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 次の 3 成分を考える。これらのひずみはパラメータ座標を用いると次のように表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

これを行列で表示すると

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \\
 &= [\mathbf{H}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}_1][\mathbf{H}_3] \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \\
 &= [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}_e\} \tag{84}
 \end{aligned}$$

なお、上式中の $[\mathbf{H}_1][\mathbf{H}_3]$ 計算は微分の連鎖則を用いて以下のような手続きで数値的に計算する。

1) (80)より与えられた ξ と η について

$$\frac{\partial N_I}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\xi_I(1+\eta\eta_I), \quad \frac{\partial N_I}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\eta_I(1+\xi\xi_I) \quad (\mathbf{I}=1\sim 4)$$

の値を計算する。

2) 1)の結果および節点の座標値を用いて

$$\begin{aligned}
[J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} x_I & \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} y_I \\ \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} x_I & \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} y_I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (85)
\end{aligned}$$

を計算する.

3) 逆行列を求める公式を用いて

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (86)$$

を数値的に計算する.

4) 3) で得られた結果を $[\mathbf{H}_1]$ の各項に代入する.

3.4 応力ひずみ関係式

平面応力状態の応力ひずみ関係式は三角形要素の場合と同じく(23)式で与えられる.

3.5 運動方程式

以上の関係を弱形式で表された運動方程式(7)に代入すると, 三角形一次要素と同様の手続きを経て次の1要素の運動方程式を得る.

$$[\delta \mathbf{u}^e] \left([\mathbf{m}] \{\ddot{\mathbf{u}}^e\} + [\mathbf{k}] \{\mathbf{u}^e\} \right) = [\delta \mathbf{u}^e] \left(\{\mathbf{f}_r\} + \{\mathbf{f}_b\} \right) \quad (87)$$

$$[\mathbf{m}] = t \int_S \rho [\mathbf{N}]^t [\mathbf{N}] dS = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [\mathbf{N}]^t [\mathbf{N}] |J| d\xi d\eta \quad (88)$$

$$[\mathbf{k}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] |J| d\xi d\eta \quad (89)$$

$$\{\mathbf{f}_r\} = t \int_{\Gamma_{12}} [\mathbf{N}]^t \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Gamma \quad \{\mathbf{f}_b\} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^t \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (90)$$

上式の積分結果を陽に求める公式はなく、以下に示す数値積分によって計算する。

3.6 数値積分

アイソパラメトリック要素の積分には数値積分法の一つである Gauss-積分を用いる。この積分法は n 個の積分点を用いて $2n-1$ 次の多項式を -1 から 1 までの区間を正しく積分することができる。 $2n-1$ 次の多項式には係数が $2n$ 個あるから、これらを決定するためには $2n$ ヶ所の積分点で関数値を計算する必要がある。これが、半分の数で済むのは奇数次項は積分が 0 となることを利用する。そのアルゴリズムは以下の通りである。

はじめに被積分関数を p 次多項式 $f(\xi)$ で近似する。

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_p \xi^p, \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (91)$$

ここで、 $f(\xi)$ の $-1 \leq \xi \leq 1$ における定積分を I とし、 I を重み W_i と積分点 ξ_i ける関数値 $f(\xi_i)$ ($i=1 \sim n$) で次式のように近似する。

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2) + \dots + W_n f(\xi_n) = \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i) \quad (92)$$

上式に各積分点での関数値

$$\begin{cases} f(\xi_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_p \xi_1^p \\ f(\xi_2) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \dots + \alpha_p \xi_2^p \\ \vdots \\ f(\xi_n) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_p \xi_n^p \end{cases} \quad (93)$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
I &= W_1(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_p \xi_1^p) + W_2(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \cdots + \alpha_p \xi_2^p) + \\
&\quad \cdots + W_n(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \cdots + \alpha_p \xi_n^p) \\
&= (W_1 + \cdots + W_n)\alpha_0 + (W_1 \xi_1 + \cdots + W_n \xi_n)\alpha_1 + \\
&\quad \cdots + (W_1 \xi_1^p + \cdots + W_n \xi_n^p)\alpha_p
\end{aligned} \tag{94}$$

を得る. 一方, (91)を解析的に積分すると次式を得る.

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \cdots + \frac{1 - (-1)^{p+1}}{p+1}\alpha_p \tag{95}$$

ここで奇数次数の項は対称性によって全て0になることに注意しよう. (94)と(95)の α_i の係数を比較することで, 次の $p+1$ 本の連立1次方程式を得る.

$$\begin{cases}
W_1 + \cdots + W_n = 2 \\
W_1 \xi_1 + \cdots + W_n \xi_n = 0 \\
\vdots \\
W_1 \xi_1^p + \cdots + W_n \xi_n^p = \frac{1 - (-1)^{p+1}}{p+1}
\end{cases} \tag{96}$$

未知数は重み W_i と積分点 ξ_i ($i=1 \square n$)であるから方程式の数と未知数の関係が,
 $p+1 = 2n$

であれば解を得ることができる. つまりガウス積分では n 個の積分点で $2n-1$ 次までの多項式を厳密に積分することができるのである. 以下で具体的に重み W_i と積分点 ξ_i を求めてみよう.

i) $n=1, (p=1)$ のとき

(96)の0次と1次の係数に関する式より

$$\begin{cases}
W_1 = 2 \\
W_1 \xi_1 = 0
\end{cases}$$

となるので, $W_1 = 2, \xi_1 = 0$ を得る.

ii) $n=2, (p=3)$ のとき

(96)の0,1,2,3次の係数に関する式より

$$\begin{cases} W_1 + W_2 = 2 \\ W_1\xi_1 + W_2\xi_2 = 0 \\ W_1\xi_1^2 + W_2\xi_2^2 = 2/3 \\ W_1\xi_1^3 + W_2\xi_2^3 = 0 \end{cases}$$

これより $\xi_1 = -\xi_2 = -1/\sqrt{3}$, $W_1 = W_2 = 1.0$ を得る.

iii) $n = 3, (p = 5)$

(96)の 0,1,2,3,4,5 次の係数に関する式より

$$\begin{cases} W_1 + W_2 + W_3 = 2 \\ W_1\xi_1 + W_2\xi_2 + W_3\xi_3 = 0 \\ W_1\xi_1^2 + W_2\xi_2^2 + W_3\xi_3^2 = 2/3 \\ W_1\xi_1^3 + W_2\xi_2^3 + W_3\xi_3^3 = 0 \\ W_1\xi_1^4 + W_2\xi_2^4 + W_3\xi_3^4 = 2/5 \\ W_1\xi_1^5 + W_2\xi_2^5 + W_3\xi_3^5 = 0 \end{cases}$$

を得る. これより

$\xi_1 = -\xi_3 = -\sqrt{3/5}$, $\xi_2 = 0.0$, $W_1 = W_3 = 5/9$, $W_2 = 8/9$ を得る.

以上の結果をまとめたのが表 3-1 である.

表 3-1 ガウス積分点位置と重み

積分点数 n	重み w	積分点位置
1	2	0
2	$W_1 = 1$ $W_2 = 1$	$\xi_1 = -1/\sqrt{3}$ $\xi_2 = 1/\sqrt{3}$
3	$W_1 = 5/9$ $W_2 = 8/9$ $W_3 = 5/9$	$\xi_1 = -\sqrt{3/5}$ $\xi_2 = 0.0$ $\xi_3 = \sqrt{3/5}$

練習 2.2

関数 $f(x) = x^3 + 2x + 1$ を以下の区間で Gauss 法により積分しなさい.

(a) $-1 \leq x \leq 1$

(b) $0 \leq x \leq 4$

(a) $f(x)$ は 3 次関数なので積分点数は 2 点で良い. 表 3-1 より積分点位置は $x = \pm 1/\sqrt{3}$, 重みは 1 となる. したがって

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2$$

(b) 積分区間が -1 から 1 となるよう次のように変数変換する.

$$t = \frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow x = 2t + 2$$

この t を使って積分を書き換えると

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(2t+2) \left(\frac{dx}{dt}\right) dt \\ &= \int_{-1}^1 2 \{8(t^3 + 3t^2 + 3t) + 4t + 13\} dt \end{aligned}$$

となる. 上式に対して Gauss 積分を適用すれば

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 2 \{8(t^3 + 3t^2 + 3t) + 4t + 13\} dt \\ &= 2 \left[\left\{ 8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 13 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 8\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 13 \right\} \right] \\ &= 84 \end{aligned}$$

となる.

さて(88)などアイソパラメトリック要素の積分では 2 重積分を実施する必要がある. 2 重積分

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

を数値積分するには, はじめに ξ 方向に数値積分を実施する。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{i=1}^{m1} w_i g(\xi_i, \eta) \right\} d\eta \\
&= \sum_{j=1}^{m2} \left\{ w_j \sum_{i=1}^{m1} w_i g(\xi_i, \eta_j) \right\} = \sum_{j=1}^{m2} \sum_{i=1}^{m1} w_i w_j g(\xi_i, \eta_j)
\end{aligned} \tag{97}$$

上式において $m1, m2$ はそれぞれ ξ 方向, η 方向の積分点数 (通常は $m1 = m2$)、 i, j は積分点番号、 w_i, w_j は積分点の重み、 ξ_i, η_j は積分点座標である。

4 節点アイソパラメトリック要素の積分点数は一方向に 2 点, 全部で 4 点で十分とされる。したがって質量行列 $[\mathbf{m}]$ や剛性行列 $[\mathbf{k}]$ の数値積分は

$$[\mathbf{m}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j [\mathbf{m}(\xi_i, \eta_j)] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j \left(\rho [\mathbf{N}]^t [\mathbf{N}] |J| \right)_{at(\xi_i, \eta_j)} \tag{98}$$

$$[\mathbf{k}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j [\mathbf{k}(\xi_i, \eta_j)] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j \left([\mathbf{B}]^t [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] |J| \right)_{at(\xi_i, \eta_j)} \tag{99}$$

となる。実際の積分は次のようなアルゴリズムになる。

- 1) 積分点の位置と重みを与える。

$$\xi_1 = \eta_1 = -1/\sqrt{3}$$

$$\xi_2 = \eta_2 = 1/\sqrt{3}$$

$$W_1 = W_2 = 1$$

- 2) 質量行列 $[\mathbf{m}]$, 剛性行列 $[\mathbf{k}]$ を初期化する。

$$[\mathbf{m}] = [\mathbf{k}] = \mathbf{0}$$

- 3) 数値積分の実行

- i) $i=1, 2$ の順に

- ii) $j=1, 2$ の順に

ξ_i, η_j において

$$[\mathbf{m}] = [\mathbf{m}] + W_i W_j \rho [\mathbf{N}]^t [\mathbf{N}] |J|$$

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{k}] + W_i W_j [\mathbf{B}]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \mathbf{J}$$

を計算する

ii) ~

i) ~

(終了)

以上が 1 要素の剛性行列と剛性行列を数値積分によって計算する方法である。

なお、4 節点アイソパラメトリック要素でも要素の質量の 4 分の 1 を対角項に配置する集中質量行列もしばしば使用される。

3.7 多要素の運動方程式

数値積分によって要素質量行列と剛性行列が計算されたら、三角系要素と同様に全体変位ベクトル \mathbf{u}^{all} から要素 i 変位ベクトル $\mathbf{u}^{(i)}$ を抽出する行列を $[\mathbf{L}^{(i)}]$ を作成し、(56), (57) で全体質量行列 $[\mathbf{M}]$ および剛性行列 $[\mathbf{K}]$ を計算することができる。

練習2.3

下図に示す静的な問題を四節点アイソパラメトリック要素を用いて計算するプログラムを作成しなさい。ヤング率、ポアソン比はそれぞれ $E = 200000[N/mm^2]$, $\nu = 0.27$ とする。また、板厚は $1[mm]$ とする。

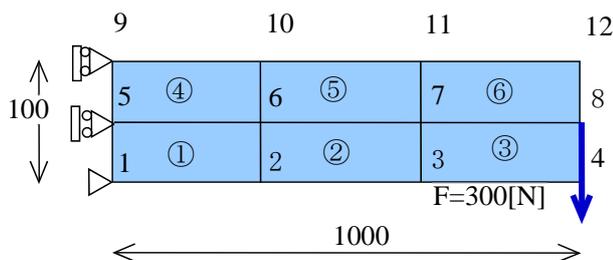


図 14 四辺形要素を用いた静的解析

プログラムの例を以下に示す。ここではメインとなるプログラムの他に、要素剛性行列を作る関数 `estif4_plane` と、節点変位とひずみの関係式を作る `make_b` のふたつの関数を定義する。関数は関数名の `m` ファイルとしてメインプログラムと同じディレクトリにおいておく。このように関数を導入することによりプログラムの見通しが良くなる。

```
1: clear all
2: young=200000.0; pois=0.27; mprop=[young pois]; % 材料定数
3: % 節点座標
```

```

4: x=[0 333 666 1000 0 333 666 1000 ...
5:   0 333 666 1000];
6: y=[0 0 0 0 50 50 50 50 ...
7:   100 100 100 100];
8: % 要素コネクティビティ
9: ne=[1 2 6 5;2 3 7 6;3 4 8 7; ...
10:    5 6 10 9; 6 7 11 10; 7 8 12 11];
11: node=12; nelm=6; %全節点数, 全要素数
12: % 剛性行列の作成
13: K=zeros(2*node);
14: for ie=1:nelm
15:     [map,k]= estif4_plane(ie,x,y,ne,mprop) %要素剛性行列の作成
16:     K(map,map)=K(map,map)+k; %全体剛性行列への足し込み
17: end
18: fix=[1 2 9 17]; % 拘束自由度
19: f=zeros(2*node,1);f(16)=-300; % 荷重ベクトル
20: free=setdiff([1:2*node],fix); % 拘束されていない自由度のリスト作成
21: u=zeros(2*node,1);
22: u(free)=K(free,free)\f(free) % 連立方程式を解く
23: % 変形図
24: uu=reshape(u,2,node); scale=100;
25: xx=x+scale*uu(1,:); yy=y+scale*uu(2,:);
26: for ie=1:nelm
27:     imap=[ne(ie,1) ne(ie,2) ne(ie,3) ne(ie,4)];
28:     xl=xx(imap); yl=yy(imap);
29:     fill(xl,yl,'w');hold on
30: end
-----
31: function [map, k]= estif4_plane(ie,x,y,ne,mprop)
32:     young=mprop(1); pois=mprop(2); % 材料定数
33: % 応力ひずみ関係式 [C]
34: c=zeros(3);
35: c1=young/(1-pois*pois); c2=pois*c1;c3=young/(2*(1+pois));
36: c(1,1)=c1; c(2,2)=c1;c(1,2)=c2; c(2,1)=c2;c(3,3)=c3;
37: k=zeros(8); % 剛性行列を準備する
38: imap=[ne(ie,1) ne(ie,2) ne(ie,3) ne(ie,4)];
39: map=[2*imap-1 2*imap]
40: xl=x(imap); yl=y(imap);
41: p=1/3^0.5; s=[-p p p -p]; t=[-p -p p p];
42: for i=1:4
43:     [ b,ds] = make_b4(xl,yl,s(i),t(i)); % [B]行列の計算
44:     k=k+ds*b'*c*b
45: end
46: end
-----
47: function [ b,ds] = make_b(xl,yl,s,t)
48: % 4角形要素の変位ひずみ行列
49: H2=0.25*[-1+t 1-t 1+t -1-t; -1+s -1-s 1+s -1-s];
50: ZE=[0 0 0 0;0 0 0 0];
51: H3=[H2 ZE; ZE H2];
52: dx=H2*xl'; dy=H2*yl';
53: J=[dx dy];
54: ds=det(J);

```

```
55: G=inv(J);
56: sx=G(1,1); tx=G(1,2);sy=G(2,1);ty=G(2,2);
57: H1=[sx tx 0 0; 0 0 sy ty;sy ty sx tx];
58: b=H1*H3;
59: end
```

-
- 2 行目でヤング率，ポアソン比を定義し，これらを一次元配列 mprop に記憶する.
 - 3 行目から 7 行目にかけて節点座標を一次元配列として入力している.
 - 8 行目から 12 行目では要素コネクティビティを入力している.
 - 13 行目では全体剛性行列を作成し初期化する.
 - 14 行目から 17 行目では要素剛性行列を作成して全体剛性行列に組み込む. なお，戻り値の map は要素自由度を並べた一次元配列である.
 - 19 行目で荷重ベクトルを作成する.
 - 20 行目で 1 から全自由度までの数字の並びから，拘束された自由度を引くことによって拘束されていない自由度の並びを作成する.
 - 22 行目で拘束された自由度はマスキングして，拘束されていない自由度のみに関して連立方程式を解く.
 - 23 行目から 30 行目にかけて変形図を作成する. 24 行目で，連立方程式の解を，1 行目を x 方向変位，2 行目を y 方向変位になるよう 2 次元の行列に変換する. 25 行目で，変形を拡大した節点位置を計算する. 28 行目で要素の 4 節点を抽出する. 29 行目では，2 次元の多角形を表示する関数 fill を用いて要素を表示する. 引数 'w' は塗りつぶしの色が白であることを意味する. また，'hold on' は同じウィンドウ上に次の要素を描画するために必要なコマンドである.
 - 31 行目以降は要素剛性行列を計算する関数である. 入力引数は左より要素番号，節点 x 座標 (1 次元配列)，節点 y 座標 (一次元配列)，要素コネクティビティ (2 次元配列)，材料定数 (一次元配列) である. もどり値は左より，要素自由度並び (一次元配列)，要素剛性行列 (2 次元配列) である.
 - 32 行目から 36 行目にかけて材料構成則を表す行列を作成している.
 - 38 行目，39 行目で要素を構成する節点と要素自由度の並びを作成する.
 - 41 行目で Gauss 積分点 (2×2) の座標を定義する.
 - 42 行目から 45 行目で積分点毎に要素剛性行列を計算し，積分点重みを乗じて和を取る.
 - 47 行目以降は節点変位とひずみの関係式(84)を作成する関数 make_b(x1, y1, s, t) を定義する. 入力引数は要素の節点座標値と数値積分点のパラメータ座標であり出力はヤコビアンと [B] である.
 - 49 行目では形状関数を微分した(84)中の [H2] を作成する.
 - 51 行目は(84)中の [H3] を作成する.
 - 52, 53, 54 行目は(85)のヤコビ行列 [J] およびその行列式を計算する.

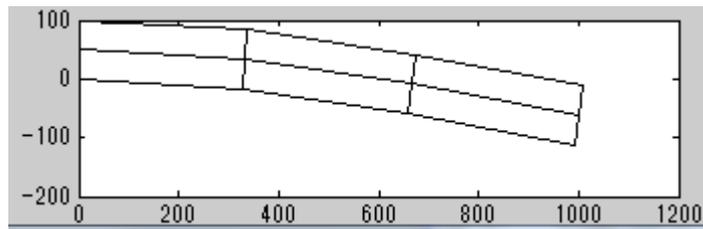


図 15 静的解析（四辺形要素）の変形図

練習2.4

練習 2.3 の水平方向，垂直方向の分割数を変えたときの正解への収束の様子を調べなさい

練習 2.3 で作成したメインプログラムを，水平方向および垂直方向の分割数を任意に変更できるようなるように変更する。

```

1: clear all
2: nx=6; ny=4; % 水平方向，垂直方向分割数
3: young=200000.0; pois=0.27; mprop=[young pois]; % 材料定数
4: % 節点座標
5: node=(nx+1)*(ny+1); % 全節点数
6: lx=1000;ly=100; % 水平方向，垂直方向の長さ
7: xr=[0:lx/nx:1000]; % x方向に等間隔に分割
8: yr=[0:ly/ny:100]; % y方向に等間隔に分割
9: x=xr;y=yr;
10: for i=1:ny; x=[x; xr]; end; %x方向の節点位置を各行とする行列を作成
11: for i=1:nx; y=[y; yr]; end; %y方向の節点位置を各行とする行列を作成
12: x=reshape(x',1,node); % (転置したものを) 一次元配列に変形
13: y=reshape(y,1,node); %一次元配列に変形
14: % 要素コネクティビティ
15: nelm=nx*ny;
16: for i=1:nx
17: for j=1:ny
18: ielm=nx*(j-1)+i;
19: i1=(nx+1)*(j-1)+i; i2=i1+1; i4=i1+nx+1; i3=i4+1;
20: ne(ielm,:)= [i1 i2 i3 i4];
21: end
22: end
23: % 剛性行列の作成
24: K=zeros(2*node);
25 for ie=1:nelm
26: [map,k]= estif4_plane(ie,x,y,ne,mprop);
27: K(map,map)=K(map,map)+k;
28: end
29: fix=[1 2]; % 左下節点のx, y 方向変位を拘束
30: for i=1:ny; fix=[fix i*(nx+1)*2+1]; end % 左端の節点列のx方向変位を拘束
31: df=-300/(ny+1); f=zeros(2*node,1);
32: for i=1:ny+1; f(i*(nx+1)*2)=df; end; % 荷重ベクトル

```

```

33: free=setdiff([1:2*node],fix);% 拘束されていない自由度のリスト作成
34: u=zeros(2*node,1);
35: u(free)=K(free,free)\f(free); % 連立方程式を解く
36: I=ly^3/12; d=300*lx^3/(3*young*I);
37: uc=max(abs(u))/d
38: fid=fopen('output.dat','at'); fprintf(fid,'%d %d %e \n',nx,ny,uc); fclose(fid);

```

- 2 行目では水平方向，および垂直方向の分割数を指定する．
- 5 行目から 12 行目では水平方向，および垂直方向の節点位置を作成する．格子点の作成にはいろいろな方法が考えられるが，ここでは以下のように作成している．すなわち，はじめに x 方向および y 方向の格子点位置を並べた行列を作成し，これを reshape() を用いて 1 次元配列に変換する．
- 14 行目から 22 行目では要素コネクティビティを作成する．
- 23 行目から 28 行目では全体剛性行列を作成している．
- 29 行目，30 行目では片持ちはりの拘束自由度の並びを作成する．
- 31 行目，32 行目では端部に裁荷する荷重ベクトルを作成する．
- 33 行目では自由度の並びから拘束された自由度をひいて拘束されていない（アクティブな）自由度の並びを作成する．
- 35 行目では連立方程式を解く．
- 36 行目ではせん端に集中荷重を受ける片持ちはりのたわみ $\delta = PL^3 / (3EI)$ を計算する．
- 37 行目では，変位の絶対値最大の値を抽出し，これと理論式のたわみ δ の比をも求める．
- 38 行目ではファイルを追加書きモードでオープンし，x 方向分割数，y 方向分割数，無次元化したたわみを記録している．出力の形式は c 言語に準じている．%d は整数型のフォーマット，%e は浮動小数点フォーマットを，また，\n は改行を表す．

上記のプログラムの 2 行目の nx を 2 から 32, ny を 2 から 4 に変更しながら流すと，38 行目で結果が output.dat に追記されていく．output.dat の内容の一例を下記に示す．

```

2 2 9.262004e-002
4 2 2.889798e-001
8 2 6.151915e-001
16 2 8.571734e-001
32 2 9.507284e-001
2 4 9.271954e-002
4 4 2.901624e-001
6 4 4.792309e-001
8 4 6.208453e-001
16 4 8.683452e-001
32 4 9.645863e-001

```

練習 2.5

このファイルより x 方向分割数と y 方向分割数と解析精度の関係を表す 3 次元グラフを作

成しなさい。

プログラムの例を以下に示す。

```
1:fid=fopen('output.dat','rt');
2: ZZ=fscanf(fid,'%d %d %e',[3,inf]);
3: fclose(fid);
4: x= ZZ(1,:); y= ZZ(2,:); z=ZZ(3,:);
5: [XI,YI]=meshgrid(2:32,1:6);
6: ZI=griddata(x,y,z,XI,YI);
7: surf(XI,YI,ZI);
8: hold on
9: plot3(x,y,z,'o');
```

- 1行目ではデータファイルをオープンする。
- 2行目では、データを整数型、整数型、浮動小数点型で読み出し、3行×n列の行列としてZZに記憶する。なお、infはデータ終了を表す。列数nはこのinfによって自動的に決定される。
- 4行目ではZZの1行目、2行目、3行目をそれぞれ一次元配列x,y,zに記憶する。
- 5行目から7行目では3次元曲面を描画する。組込関数surf()は規則格子データでなければいけないので、5行目で、x方向には2から32の範囲、y方向には1から6の範囲で規則格子を作成する。6行目では入力データ(x,y,z)から規則格子上のz値ZIを内挿する。
- 8行目で、次のグラフも同じウィンドウに描くよう指示する。
- 9行目で読み込んだデータ点(x,y,z)を○で3次元表示する。

上のプログラムを実行するとグラフウィンドウが表れ次のような図形が描画される。この図よりy方向（はりの高さ方向）の分割数に比べ、x方向（はりの軸方向）の分割数の方が精度に与える影響が大きいことがわかる。

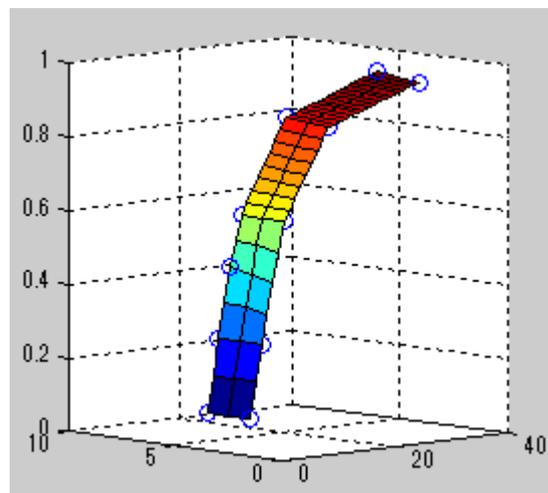


図 16 静的解析（四辺形要素）の変形図

規則格子では $n_x=32$, $n_y=2$ 正解の 92%のたわみが得られるが、不規則格子になるとどうなるであろうか。下図に中央の節点を水平に移動して作成した台形上メッシュと、先端のたわみの正解に対する比を示す。(a)は基準とした長方形要素,(b)は中央の節点列を基準位置より $\pm 20\text{mm}$ 移動したモデル,(c)は基準位置より $\pm 40\text{mm}$ 移動したモデルである。また、() 内に正解に対する先端たわみの比を示す。要素のゆがみが大きくなると解析精度が著しく低下していくことがわかる。四辺形要素は長方形である必要はないが、ゆがみが大きくなると解析精度も低下するので注意が必要である。

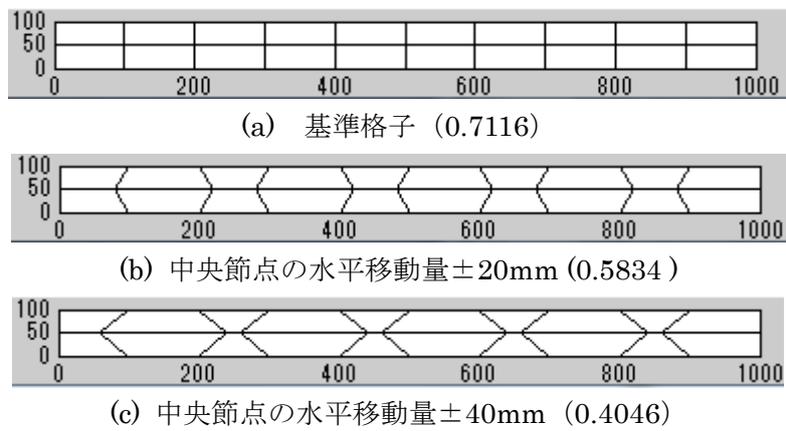


図 17 要素のゆがみと解析精度の関係

